JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **45**, 19–25 (1985)

# Koeffizientenwachstum bei der Approximation durch verallgemeinerte Polynome

LOTHAR HOISCHEN

*Mathematisches Institut der Universität Giessen, D-6300 Giessen, West Germany*

*Communicated by Oved Shisha*

Received December 13, 1983

In [1] und [6] wurde unter anderem gezeigt, daß zu jeder Funktion $f$ aus $C[0, 1]$ mit $f(0)=0$, zu jedem $\varepsilon>0$ und zu jeder Folge positiver Zahlen $w_n$ mit $w_n \to \infty$ ein Polynom $P(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n x^n$ existiert mit

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon(x \in [0, 1]) \quad \text{und} \quad |a_n|<w_n^n \ (n=1, 2, \ldots, N).$$

Dieses Ergebnis sowie auch weiterführende Sätze in [2] konnten in ganz spezieller Weise durch die Abschätzung der Koeffizienten Bernsteinscher Polynome gewonnen werden.

Um nun nicht nur für Polynome sondern auch im Falle allgemeinerer Linearformen bestmögliche Approximationen dieser Art bei zugehörigen Koeffizientenbeschränkungen zu erhalten, zeigen wir in Form einer allgemeineren Theorie mit einer in [4] benutzten funktionalanalytischen Beweismethode die Äquivalenz solcher Approximationseigenschaften mit gewissen Identitätsbedingungen für Integraltransformationen.

Als Anwendung dieser allgemeineren Ergebnisse lassen sich dann zahlreiche spezielle Approximationssätze herleiten. Insbesondere erhalten wir sehr einfache und elegante Beweise für die folgenden drei Sätze, die teilweise Verschärfungen zu [1] und [2] ergeben.

Es bezeichne $(\lambda_n)_0^\infty$ im weiteren stets eine Folge verschiedener reeller Zahlen mit $0=\lambda_0<\lambda_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

*Satz* 1. *Gilt* $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda_n)=\infty$ *und* $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqslant c>0$ *für die Folge* $(\lambda_n)$, *dann gibt es zu jeder Funktion* $f \in C[0, 1]$, *zu jedem* $\varepsilon>0$ *und zu jeder Folge* $(w_n)$ *positiver Zahlen mit* $w_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *ein Polynom* $P(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^{\lambda_n}$ *so, daß*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon(x \in [0, 1])$$

*und*

$$a_0=f(0), \ |a_n|<w_n^{\lambda_n} \ (n=1, 2, \ldots, N).$$



0021-9045/85 $3.00

Als Verschärfung zu [1, Theorem 3; 2, Theorem 2] erhalten wir

SATZ 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 bezüglich* $(\lambda_n)$ *gibt es zu jeder Funktion* $f \in C[a, b]$ *mit* $0 < a < b$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein Polynom* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{\lambda_n}$ *sowie ein Polynom* $P_1(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n x^{\lambda_n}$ *mit*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad |f(x) - P_1(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a, b])$$

und $a_0 = f(a)$, $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \, a^{\lambda_n} < 1$, $\sum_{n=1}^{N} |b_n| (a/(1+\varepsilon))^{\lambda_n} < 1$, *so daß insbesondere gilt*

$$|a_n| < a^{-\lambda_n}, \qquad |b_n| < ((1+\varepsilon)/a)^{\lambda_n} \qquad (n = 1, 2, ..., N).$$

Im Falle beschränkter $\lambda_n$ ergibt sich

SATZ 3. *Gilt* $\lambda_n \to k$ $(n \to \infty)$ *mit* $0 < k < \infty$ *für die Folge* $(\lambda_n)$, *dann gibt es zu jeder Funktion* $f \in C[0, 1]$, *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und zu jeder Folge* $(w_n)$ *positiver Zahlen mit* $w_n \to \infty$ *ein Polynom* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{\lambda_n}$ *mit*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon (x \in [0, 1])$$

*und*

$$a_0 = f(0), \sum_{n=1}^{N} |a_n| \, |\lambda_n - k|^{w_n} < 1.$$

Um nun für entsprechende Approximationen durch Linearformen aus anderen Funktionen eine allgemeinere Theorie zu erhalten, betrachten wir einen linearen normierten Raum $X$ mit der Norm $\|f\|$ für $f \in X$ und bilden abzählbare Systeme $S \subset X$ von Elementen $K_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$.

Wir sagen, daß das System $S$ in $X$ bezüglich einer Folge positiver Zahlen $c_n$ $(n = 1, 2, ...)$ die Identitätseigenschaft $I(K_n, c_n)$ besitzt, falls für jedes beschränkte lineare Funktional $F$ auf $X$ aus $F(K_n) = \mathcal{O}(c_n)$ $(n \to \infty)$ stets $F(f) = 0$ für alle $f \in X$ folgt.

Wir beweisen als wesentlichen Hilfssatz

SATZ 4. *Es sei* $X$ *ein linearer normierter Raum mit der Norm* $\|f\|$ *für* $f \in X$. *Ferner sei* $S$ *ein System mit Elementen* $K_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$, *und es seien* $c_n$ $(n = 1, 2, ...)$ *positive Zahlen. Genau dann gibt es zu jedem* $f \in X$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $P = \sum_{n=1}^{N} a_n K_n$ *aus* $X$ *mit*

$$\|f - P\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n| \, c_n < \varepsilon, \tag{1}$$

*wenn* $I(K_n, c_n)$ *gilt.*

Es sei darauf hingewiesen, daß die Abschätzung (1) bei beliebigem $f \in X$ mit

$$\|f-P\|<1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, c_n < 1$$

gleichwertig ist.

Wir wählen nun speziell $X = C_0[0, q]$ mit $0 < q \leqslant \infty$. Dabei bezeichne $C_0[0, q]$ für endliches $q$ die Klasse aller auf $[0, q]$ stetigen Funktionen $f$ mit $f(q) = 0$. Entsprechend sei $C_0[0, \infty]$ die Menge aller auf $[0, \infty)$ stetigen Funktionen $f$ mit $f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Die beschränkten linearen Funktionale $F$ auf $C_0[0, q]$ $(0 < q \leqslant \infty)$ haben bekanntlich die Gestalt [7, S. 139]

$$F(f) = \int_0^q f(t)\, d\alpha(t) \qquad \text{mit} \int_0^q |d\alpha(t)| < \infty,$$

wobei $\alpha$ im Falle eines endlichen $q$ wegen $f(q) = 0$ als linksseitig stetig in $t = q$ angenommen werden kann, und die Integrale im Falle $q = \infty$ als uneigentlich bezüglich $\infty$ zu lesen sind.

Für ein System $S$ mit Funktionen $K_n \in C_0[0, q]$ bezeichnen wir jetzt mit $I_{[0,q]}(K_n, c_n)$ die Identitätseigenschaft, daß aus

$$\int_0^q K_n(t)\, d\alpha(t) = \mathcal{O}(c_n) \qquad (n \to \infty), \qquad \int_0^q |d\alpha(t)| < \infty$$

stets $\alpha(t) = 0$ ($t \in [0, q]$ bzw. $t \in [0, \infty)$ im Falle $q = \infty$) folgt für jede normierte Belegungsfunktion $\alpha$. Dabei heißt $\alpha$ normiert, wenn $\alpha$ linksseitig stetig in $(0, q]$ bzw. in $(0, \infty)$ ist mit $\alpha(0) = 0$.

Aus Satz 4 erhalten wir unmittelbar als Hauptergebnis für die Approximation durch Linearformen von Funktionen

SATZ 5. *Es sei $S$ ein System von Funktionen $K_n \in C_0[0, q]$ $(0 < q \leqslant \infty)$, und es seien $c_n$ positive Zahlen. Genau dann gibt es zu jeder Funktion $f \in C_0[0, q]$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n K_n(s)$ mit*

$$|f(s) - P(s)| < \varepsilon \quad (s \in [0, q],\ \textit{bzw. } s \in [0, \infty) \textit{ im Falle } q = \infty)$$

$$\textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, c_n < \varepsilon, \tag{2}$$

*wenn $I_{[0,q]}(K_n, c_n)$ gilt.*

Für die Anwendungen ist der folgende Identitätssatz von Mikusiński [5] besonders wichtig, wobei wir diesen Satz in der nach [3, S.10] umgeformten Gestalt übernehmen.

SATZ 6. *Ist* $(\lambda_n)$ *eine Folge mit* $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda_n)=\infty$ *und* $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant c>0$, *dann impliziert*

$$\int_0^q e^{-t\lambda_n}\,d\alpha(t)=\mathcal{O}(e^{-q\lambda_n})\qquad (n\to\infty)\ mit\int_0^q |d\alpha(t)|<\infty$$

*für jede normierte Funktion* $\alpha$ *und für jedes endliche* $q>0$ *stets* $\alpha(t)=0$ $(t\in[0,q])$.

Ein neuer Beweis von Satz 6 wurde in [4, Folgerung aus Satz 3] gegeben.

Satz 1 folgt unmittelbar aus Satz 5 für $K_n(t)=e^{-t\lambda_n}$, $c_n=w_n^{-\lambda_n}$ bei der Approximation von $f(x)-f(0)$ mit $x=e^{-s}$, da sich die Bedingung $I_{[0,\infty]}(K_n, w_n^{-\lambda_n})$ wegen $w_n\to\infty$ aus Satz 6 ergibt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die sich zunächst nach Satz 5 ergebende Abschätzung $\sum_{n=1}^N |a_n|\,w_n^{-\lambda_n}<\varepsilon$ unter den Voraussetzungen von Satz 1 keine Verschärfung gegenüber $|a_n|<w_n^{\lambda_n}$ darstellt.

Satz 2 folgt entsprechend aus Satz 5 und Satz 6, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0<a<b=1$ in Satz 2 angenommen sei. Wir setzen für $a=e^{-q}$ hierbei $K_n(t)=e^{-t\lambda_n}-e^{-q\lambda_n}$, $c_n=e^{-q\lambda_n}$, so daß $K_n(q)=0$ ist. Da sich dann für diese $K_n$ nach Satz 5 die Approximation (2) mit $\sum_{n=1}^N |a_n|\,e^{-q\lambda_n}<\varepsilon$ ergibt, so können wir diese Funktionen $K_n$ auch durch $e^{-t\lambda_n}$ bei Erhaltung von (2) ersetzen, so daß wir daher für $x=e^{-s}$ das Polynom $P(x)$ in Satz 2 durch die Approximation von $f(x)-f(a)$ auf $[a,1]$ erhalten. Wird außerdem $f$ stetig auf das Intervall $[a-\varepsilon,b]$ mit $f(a-\varepsilon)=0$ fortgesetzt, dann existiert entsprechend für $a-\varepsilon=e^{-q}$ nach Satz 5 ein Polynom $P_1(x)=\sum_{n=1}^N b_n x^{\lambda_n}$ mit

$$|f(x)-P_1(x)|<\varepsilon\quad (x\in[a-\varepsilon,b]\ \text{und}\ \sum_{n=1}^N |b_n|(a-\varepsilon)^{\lambda_n}<1,$$

wobei letzteres mit $\sum_{n=1}^N |b_n|(a/(1+\varepsilon))^{\lambda_n}<1$ gleichwertig ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 3 ist nach Satz 5 zu zeigen, daß

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda_n}\,d\alpha(t)=\mathcal{O}(|\lambda_n-k|^{w_n}),\qquad \lambda_n\to k>0\ (n\to\infty)$$

für normiertes und variationsbeschränktes $\alpha$ stets $\alpha(t)=0$ $(t\geqslant 0)$ impliziert. Die Funktion $g$ mit $g(s)=\int_0^\infty e^{-ts}\,d\alpha(t)$ ist aber in der offenen rechten komplexen Halbebene analytisch, so daß aus $g(\lambda_n)=\mathcal{O}(|\lambda_n-k|^{w_n})$ bei

Entwicklung von $g(s)$ in eine Potenzreihe um $s=k$ wegen $w_n \to \infty$ leicht $g(s) \equiv 0$ folgt, woraus sich nach bekannten Identitätssätzen für Laplaceintegrale $\alpha(t)=0$ $(t \geqslant 0)$ ergibt.

Als weitere Anwendung von Satz 5 ergeben sich zahlreiche Approximationssätze insbesondere im Fall, daß $K_n(t)=K(t\lambda_n)$ mit einer Funktion $K \in C_0[0, \infty]$ ist, sofern sich dann zugehörige Identitätsbedingungen $I_{[0,\infty]}(K_n, c_n)$ herleiten lassen. Diese können in vielen Fällen durch Zurückführung auf Identitätssätze für Laplaceintegrale oder analytische Funktionen bei Benutzung von Satz 6 gewonnen werden.

Aus der großen Fülle andersartiger Anwendungen beweisen wir hier nur folgenden Approximationssatz.

SATZ 7. *Die Funktion $\phi$, $\phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ sei analytisch für $|z|<r$, $r>0$, wobei*

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ b_k \neq 0}} \frac{1}{k} = \infty$$

*gelte. Es seien $(\lambda_n)$, $(t_n)$ Folgen positiver Zahlen mit $\lambda_n \to \infty$, $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es zu jeder Funktion $f \in C[0,1]$ mit $f(0)=0$ und zu jedem $\varepsilon>0$ ein $P(x)=\sum_{n=n_0}^{N} a_n \phi(x/\lambda_n)$ mit*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (x \in [0,1]) \text{ und } \qquad \sum_{n=n_0}^{N} |a_n|\, \lambda_n^{-t_n} < 1.$$

*Hierbei ist $n_0$ so groß gewählt, daß $\lambda_n^{-1}<r$ $(n \geqslant n_0)$ gilt.*

Ganz speziell erhalten wir zum Beispiel für $\phi(z)=z/(z+1)$.

SATZ 8. *Es seien $(\lambda_n)$, $(t_n)$ Folgen positiver Zahlen mit $\lambda_n \to \infty$, $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es zu jeder Funktion $f \in C[0,1]$ mit $f(0)=0$ und zu jedem $\varepsilon>0$ ein $P(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n(x/(x+\lambda_n))$ mit*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (x \in [0,1]) \text{ und } \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, \lambda_n^{-t_n} < 1.$$

Entsprechende Sätze ergeben sich für $\phi(z)=1-e^{-z}$, $\sin z$, $1-\cos z$.

*Beweis zu Satz 7.* Für $K_n(t)=\phi(e^{-t}/\lambda_n)$ ist nach Satz 5 die Bedingung $I_{[0,\infty]}(K_n, \lambda_n^{-t_n})$ zu zeigen. Aus

$$\int_0^{\infty} \phi\left(\frac{e^{-t}}{\lambda_n}\right) d\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_n^k} \int_0^{\infty} e^{-tk}\, d\alpha(t) = \mathcal{O}(\lambda_n^{-t_n}) \quad (n \to \infty)$$

mit $\int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty$ folgt bei der Multiplikation mit $\lambda_n^k$ für $n \to \infty$ jedoch sukzessiv für $k$ die Identität $\int_0^\infty e^{-tk}\, d\alpha(t) = 0$, falls $b_k \neq 0$ ist. Bei Beachtung von

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ b_k \neq 0}} \frac{1}{k} = \infty$$

erhalten wir $\alpha(t) = 0$ $(t \geqslant 0)$ nach Satz 6, womit Satz 7 gezeigt ist.

*Beweis zu Satz* 4. Es gelte zunächst $I(K_n, c_n)$ für das System $S$ des linearen normierten Raumes $X$, und wir beweisen die Approximation (1) funktionalanalytisch. Es sei $A_\infty$ die Klasse aller unendlichen Tupel $\beta = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ mit beliebigen Koeffizienten $a_n$, und es sei ferner $A \subset A_\infty$ die Unterklasse aller $\beta \in A_\infty$ mit $a_n \neq 0$ für nur endlich viele $n$. Es bezeichne $\beta_0$ das Nullelement. Jedem $\beta = (a_1, a_2, ..., a_N, 0, 0, ...) \in A$ werde $P_\beta \in X$ zugeordnet mit $P_\beta = \sum_{n=1}^N a_n K_n$. Wir bilden nun die Menge $T$ aller Tupel $w = (f, \beta)$ mit $f \in X$ und $\beta \in A$. Die Klasse $U$ aller Tupel $(P_\beta, \beta)$ mit $\beta \in A$ ist dann eine Untermenge von $T$.

Mit der Norm

$$\|w\| = \|(f, \beta)\| = \|f\| + \|\beta\|$$

mit $\|\beta\| = \sum_{n=1}^N |a_n|\, c_n$ für $\beta = (a_1, ..., a_N, 0, 0, ...)$ ist $T$ ein linearer normierter Raum bei Beachtung von $c_n > 0$. Offensichtlich ist $U$ ein linearer Unterraum von $T$.

Zum Beweis von (1) genügt es $\bar{U} = T$ zu zeigen, wobei $\bar{U}$ die abgeschlossene Hülle von $U$ in $T$ bezüglich obiger Norm ist. Es sei nun $F$ ein beschränktes lineares Funktional auf $T$ mit $F(P_\beta, \beta) = 0$ für alle $(P_\beta, \beta) \in U$. Dann ist $F(w) = 0$ für alle $w = (f, \beta) \in T$ zu zeigen [7, S. 114].

Da $w = (f, \beta) = (f, \beta_0) + (f_0, \beta)$ ist mit $f_0$ als Nullelement in $X$ und mit dem Nullelement $\beta_0 \in A$, so folgt aus der Linearität von $F$ für alle $w = (f, \beta) \in T$

$$F(w) = F(f, \beta_0) + F(f_0, \beta). \tag{3}$$

Durch den ersten Term $F(f, \beta_0)$ in (3) wird nun ein beschränktes lineares Funktional auf $X$ gebildet.

Speziell für $\beta_k \in A$ $(k = 1, 2, ...)$ mit den Koeffizienten $a_n^{(k)} = 0$ $(n \neq k)$, $a_k^{(k)} = 1$ und für $f = P_{\beta_k} = K_k$ $(k = 1, 2, ...)$, $w = (K_k, \beta_k)$ ergibt sich wegen $F(P_\beta, \beta) = 0$ aus (3)

$$|F(K_k, \beta_0)| = |F(f_0, \beta_k)| \leqslant \|F\|\ \|\beta_k\| = \|F\|\, c_k = \mathcal{O}(c_k) \quad (k \to \infty),$$

wobei $\|F\|$ die Norm des linearen Funktionals $F$ ist. Somit folgt aus $I(K_n, c_n)$, daß $F(f, \beta_0)$ auf $X$ das Nullfunktional ist. Nach (3) erhalten wir daher

$$F(w) = F(f, \beta) = F(f_0, \beta) \qquad (w \in T), \tag{4}$$

so daß die Werte von $F(f, \beta)$ und $F(P_\beta, \beta)$ nach (4) für alle $(f, \beta) \in T$ übereinstimmen. Aus $F(P_\beta, \beta) = 0$ $(\beta \in A)$ folgt somit $F(w) = 0$ für alle $w \in T$.

Umgekehrt sei die Approximation (1) für das System $S$ vorausgesetzt, und es gelte

$$|F(K_n)| \leqslant Mc_n \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{5}$$

für ein beschränktes lineares Funktional $F$ auf $X$ mit einer Konstanten $M$. Falls ein $f_1 \in X$ mit $F(f_1) \neq 0$ existiert, dann lassen sich nach (1) Elemente $P_k = \sum_{n=1}^{N_k} a_n^{(k)} K_n$ für $k = 1, 2, ...$ aus $X$ wählen mit

$$F(P_k) \to F(f_1) \neq 0 \qquad (k \to \infty) \tag{6}$$

und

$$\sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}| \, c_n < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, ...). \tag{7}$$

Aus (5) und (7) folgt aber

$$|F(P_k)| \leqslant \sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}| \, |F(K_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}| \, Mc_n \leqslant \frac{M}{k} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

was ein Widerspruch zu (6) ist. Somit gilt $I(K_n, c_n)$, und Satz 4 ist in allen Teilen bewiesen.

## Literatur


1. M. v. Golitschek, Permissible bounds on the coefficients of generalized polynomials, *in* "Approximation Theory, Proceedings of a Conference on Approximation Theory, Austin, Texas, 1973" (G. G. Lorentz, Ed.), Academic Press, New York, 1973.
2. M. v. Golitschek, Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials with real or complex exponents, *J. Math. Anal. Appl.* **60** (1977), 123–138.
3. K. Harbusch, Einschließungssätze für verallgemeinerte Abel-Matrixverfahren, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **122** (1976), 1–59.
4. L. Hoischen, Kriterien für die asymptotische Approximation durch Dirichletsche Reihen, *J. Approx. Theory* **44** (1985).
5. J. G. Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, A theorem on bounded moments, *Studia Math.* **13** (1953), 51–55.
6. J. A. Roulier, Restrictions on the coefficients of approximating polynomials, *J. Approx. Theory* **6** (1972), 276–282.
7. W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw Hill, New York, 1966.